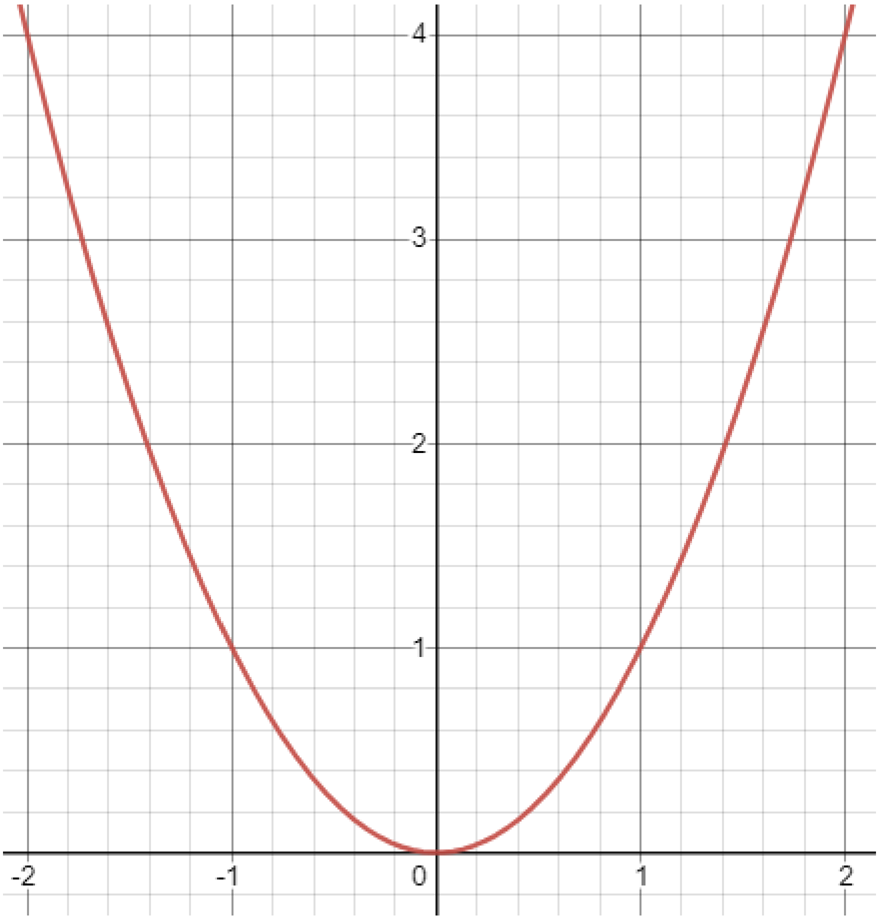
微分

数学2で扱う微分についてまとめる。

このグラフの傾きを求めたいのだが？

唐突だが、以下に$y = x^2$のグラフがある。

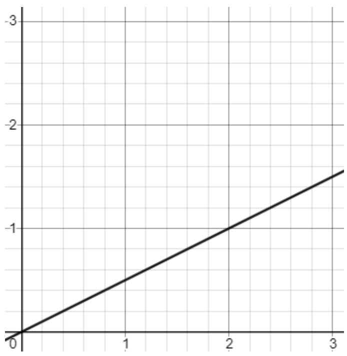
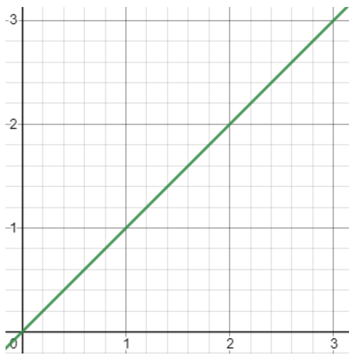
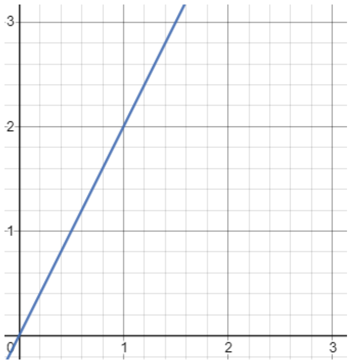
このグラフの傾きを求めたいという話から微分を理解していくという方針でやってみたいと思う。



そもそもグラフの傾きとはなんだったか

グラフの傾きを言葉で表すと、**xが増えた時にyがどれだけ増えるか**をそのグラフの傾きっていう。

以下にいくつか具体例を出す。

$y=\frac{1}{2}x$	$y=x$	$y=2x$
		
xが1増えた時に、yは0.5増えてるので、傾きは$\frac{1}{2}$	xが1増えた時に、yは1増えてるので、傾きは1	xが1増えた時に、yは2増えてるので、傾きは2

グラフの傾きを式で表すとこうなる

$$\text{傾き} = \frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}$$

例えば上のグラフの左のやつを例にして考えると

xが1増えて、yが0.5増えるというのは、xの変化量が1で、yの変化量が0.5と言い換えられるので、これを式に当てはめると

$$\text{傾き} = \frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{0.5}{1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

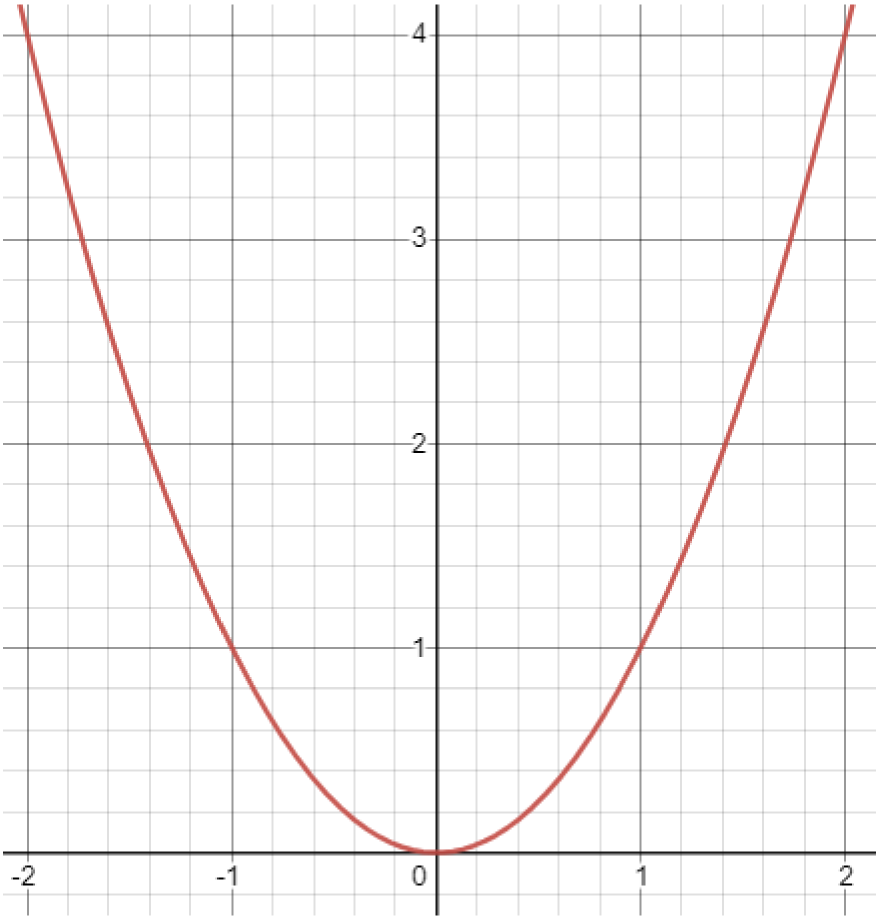
このようにしてグラフの傾きが求められる。

ここで重要なのはグラフの形がなんであれ、**xが変化した時に、yがどれくらい変化したかがわかれば傾きが求められる**ということ。

だって傾きは$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}$って話なんだし、傾き求めるための2つの数がわかればそりゃ求まるということである。

曲線のグラフの傾きとは？

グラフが曲線であれなんであれ、とりあえず**傾きの定義**があるのだから、定義に従ってやってみるとしよう



傾きを求めるにはxの変化量とyの変化量がわかればいいので、とりあえずxが0から1に変化した時のを考えてみる。

このグラフは$y = x^2$で

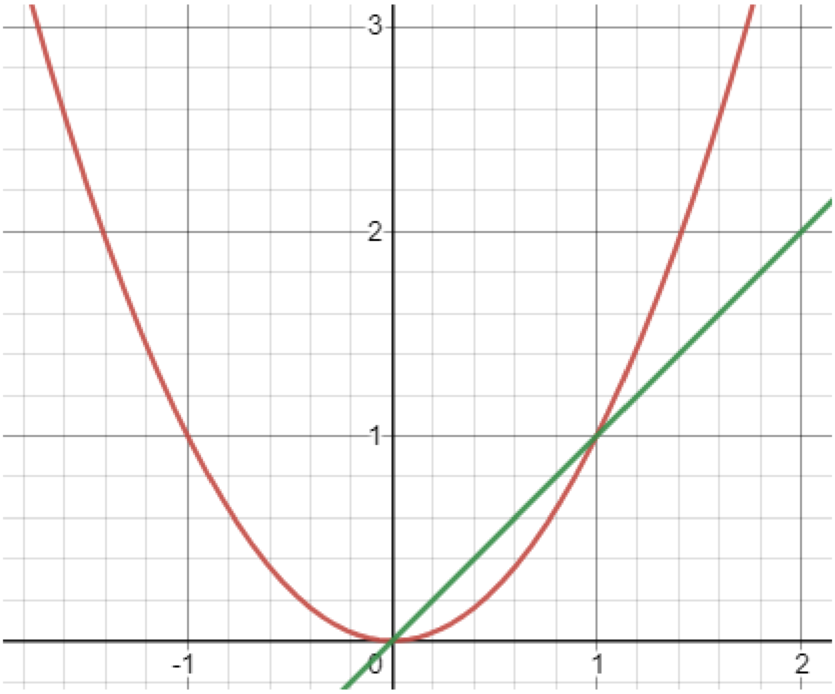
- x=0のとき、y=0
- x=1のとき、y=1

xは0から1に変化してyも0から1に変化したので、xの変化量は1だし、yの変化量も1である。

よって、傾きを求める式に当てはめると、傾きは1ということがわかる。

$$x\text{が}0\text{から}1\text{の間で調べた傾き} = \frac{1}{1} = 1$$

また$x = 0$と$x = 1$のところをつないだ直線をかいてみる、これは傾きが1の直線にもなっている。



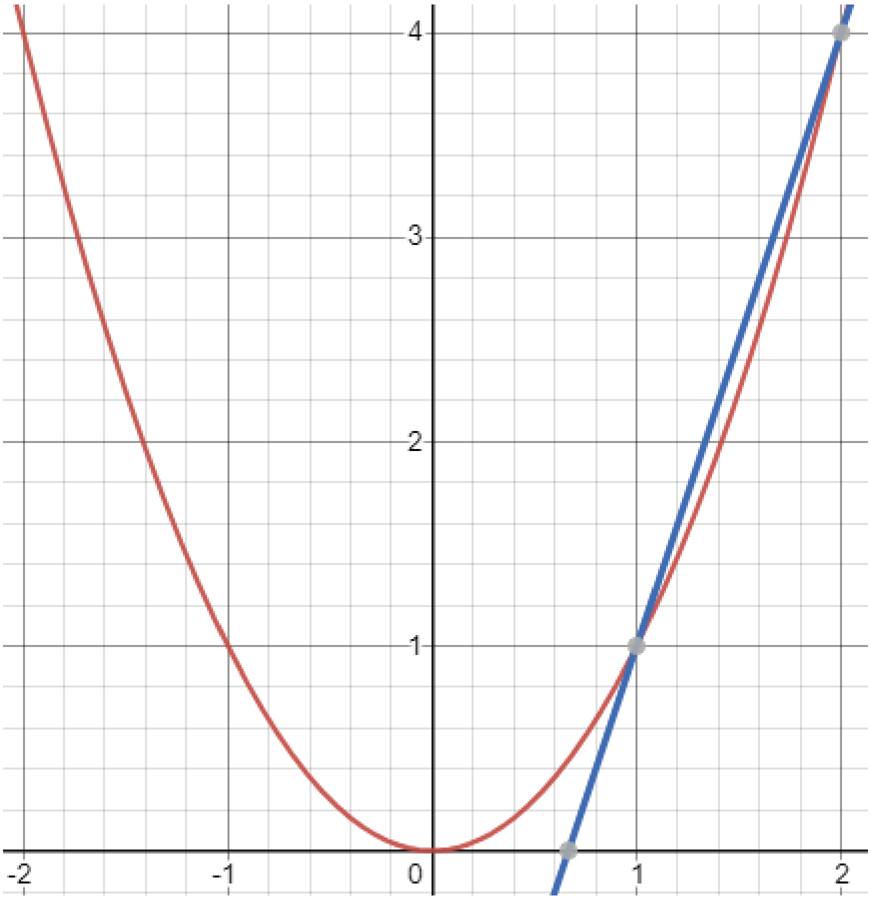
それはそれとして、もう１つ、次はxが1から2に変化する時の傾きを求めてみる。

- x=1のとき、y=1
- x=2のとき、y=4

xの変化量は変わらず1だが、yの変化量は1から4に増えたので3増えているので、傾きの式に当てはめると傾きは3と出た。

$$x\text{が}1\text{から}2\text{の間で調べた傾き} = \frac{3}{1} = 3$$

これもまた、x=1とx=2のところを結んだ直線を書いてみると、これは傾きが3の直線になる。



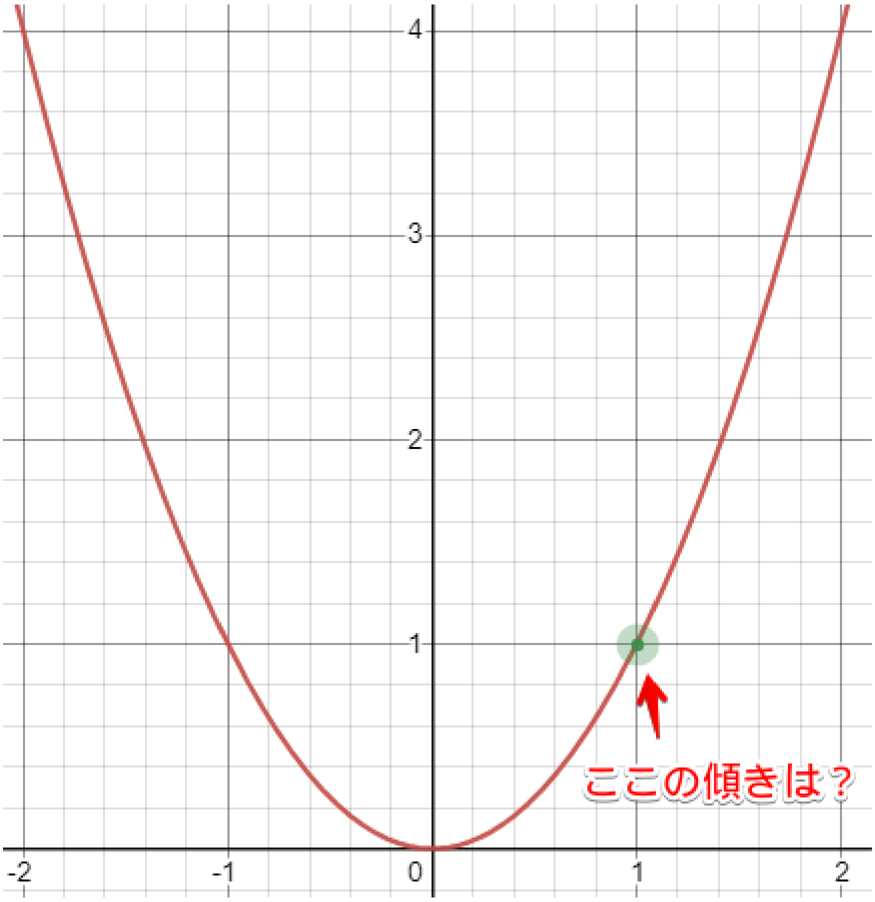
曲線のグラフの傾きは一定じゃない

2パターンについてグラフの傾きを求めてわかったことは２つある。

1つは曲線のグラフの傾きは**一定**ではないということ、もう一つは**範囲を決めればその範囲での傾きは求められる**ということ。

ある1点における傾きは求められないのか

xが0から1の間とか、1から2の間とかの傾きは求められたわけだけど、じゃぁ$x=1$の時の傾きとかは求められないだろうか？



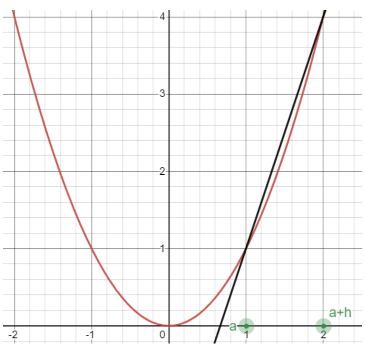
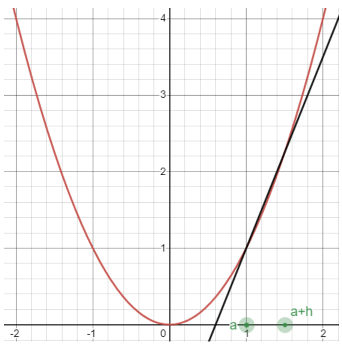
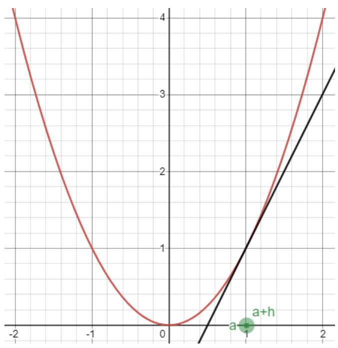
これは数学の凄い人たちが考えたわけだけど

「xの変化量がかぎりな〜〜〜〜く0に近ければ、それって実質その点での傾きじゃない？」という考え方をする。

傾きを求めたいxの値をa、xの変化量をhと書くことにして、$x=a$と$x=a+h$の間の傾きについて考えてみる。

(ここでは$a=1$つまり$x=1$のときの傾きを調べる)

ひとまず、$a=1$は固定で、hの方をかぎりな〜〜〜〜〜〜く0に近づけていく様子が以下である。

$x=1, x=2$で見た傾き	$x=1, x=1.5$で見た傾き	$x=1, x \fallingdotseq 1$で見た傾き
		
$a=1, h=1$	$a=1, h=0.5$	$a=1, h \fallingdotseq 0$

hが限りなく0に近づいた時の傾きは**実質$x=1$の時の傾き**になっていて、この考え方をすればどんなグラフであっても、**ある場所の傾き**は求める事ができる。

数式で表す

今までやっていたことを数式で表していく、やはりそこらへんは数学ですし、式で表したいのである。

傾きを求めるのに必要なのは**xの変化量と、yの変化量**の2つなので、この2つを式で表していくと

xの変化量

xの変化量はhとしてたので、hだ。

また$a+h$とaの間の長さでもあるので、以下の計算でも求まる。(どのみちhである)

$$(a+h)-a=h$$

yの変化量

yを$f(x)$と書く事にすると、yの変化量は以下のように表せる

※($y=x^2$と書いたり、$f(x)=x^2$と書いたりするのにには慣れておくと良い)

$$f(a+h)-f(a)$$

これでx,yの変化量を表せたので、傾きを求める式に当てはめる。

$$\text{傾き}=\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

これで完成としたいところだが、まだ重要な事が残っている。

傾きを求めるときには、**hをかぎりな〜〜〜〜〜〜く0に近づける必要があった**のだ。

この限りなく近づけるというのは数学で極限とかlimitという意味で、$\lim$という文字を使って表す。

例えば、hを限りなく0に近づける場合はこうかく。

$$\lim_{h\to 0}$$

この記号を使って、傾きを求める式を表現するとこうなる。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

今まで長々とやってきたことがこの1行の式で表されてしまうのである。

逆に言えばこれだけのことをたった1行にまとめてしまうのだから、これだけ見たってさっぱりわからないのが数学の難しいところだ。

微分係数

突然難しそうな言葉だが、今まで求めてきた傾きの事を**微分係数**という。

やってることはグラフの傾きを求めているだけではあるが、微分の世界では傾きとは言わず**微分係数**というということだ。

また**微分係数**を以下のように$f'(a)$と表す。

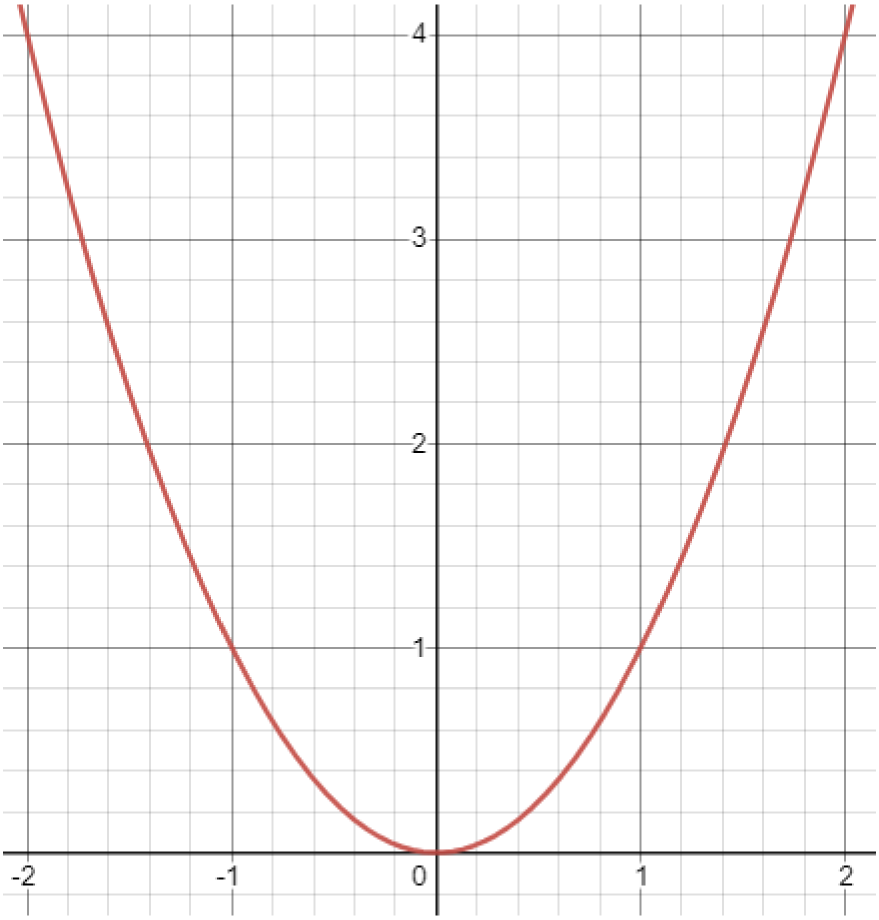
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

数学語では同じことであっても、言い回しが異なる事がたびたびある。

- $x = 1$のときの、グラフの傾きを求めよ
- $x = 1$のときの、微分係数を求めよ
- $f'(1)$を求めよ

これらはどれも同じ意味だが、数学は主に手書きの世界のためか、わかりやすい表現より書くのが楽な短い表現を好むところがある気がする。ここら辺は慣れが必要だが慣れるしかない。

改めて数学っぽく傾きを求めてみる



改めてこのグラフの傾きを数学っぽい表現で解いてみるとする。

$$f(x) = x^2 \text{としたとき、} f'(3) \text{を求めよ。}$$

これを翻訳すると$f(x) = x^2$で表されるグラフがあるので、$x = 3$のときのグラフの傾き(微分係数)を求めよという事になる。

まず微分係数を求めるので以下の式を思い出さなければならない

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

求めたいのは$f'(3)$なので、上の式に当てはめると

$$f'(3) = \lim_{0 \to h} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

①まずlimの右側の式を展開して整理する

$$\begin{aligned}\frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} \\ &= h + 6\end{aligned}$$

②limの右側部分を整理したらlimを適用する

$$\lim_{h \to 0}(h+6) = 0+6 = 6$$

limはhを限りなく0に近づけるという意味だが、やる事はhに0を代入するだけである。

③よって

$$f'(3) = 6$$

つまり$f(x) = x^2$のグラフについて、$x = 3$の時のときの傾きは6という事が求まった。

やった事は最初にグラフを見ながらやった事と同じだが、数学っぽくやるとこんな感じになる。

ここまでのまとめ

ここまで長々とやってきたが、数学的な要素として登場したのは**極限(lim)**と**微分係数**である。

実はまだ**微分**は出てきていない、次は微分とは何かに迫っていきたいと思う。

微分とは何か？

$$\text{導関数を求めることを微分という、また}f'(x)\text{を求める事を微分という}$$

まず色々意味が解らないのを承知でとりあえず微分の定義を書いておく。

この説明でなるほどとなればいいが、おそらくそうなりはしないだろう。

概ね**導関数**や$f'(x)$が謎ワードだと思うので、まずこれから説明をしていく。

導関数とは

導関数は**微分係数**とほとんどやることは同じである。

今まではxが1の時のグラフの傾きとか、xが3の時のグラフの傾きとか**具体的な値**を求めてきたが、導関数というのはこの**傾きを求める関数**ということになる。

導関数の求め方は簡単で、微分係数を求めるときは$f'(a)$に対して具体的に$f'(1)$とか$f'(3)$などの**定数**を入れていたが、導関数を求める場合は$f'(x)$のようにaの部分に**変数**を当てはめて計算するだけである。

実際に導関数を求めたほうが早いと思うのでやってみよう。

$f(x) = x^2$の導関数を求めるには、微分係数の式のaにxを当てはめる。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

①limの右を展開して整理する

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

②limの右側部分を整理したらlimを適用する

$$\lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

③よって

$$f'(x) = 2x$$

これが**導関数**である。

このように導関数を求めることを**微分**といい、導関数は$f'(x)$と表される。

冒頭に記載した微分の定義をもう一度見てみると、今なら意味がわかるはずである多分。

$$\text{導関数を求めることを微分という、また}f'(x)\text{を求める事を微分という}$$

導関数から微分係数を求める

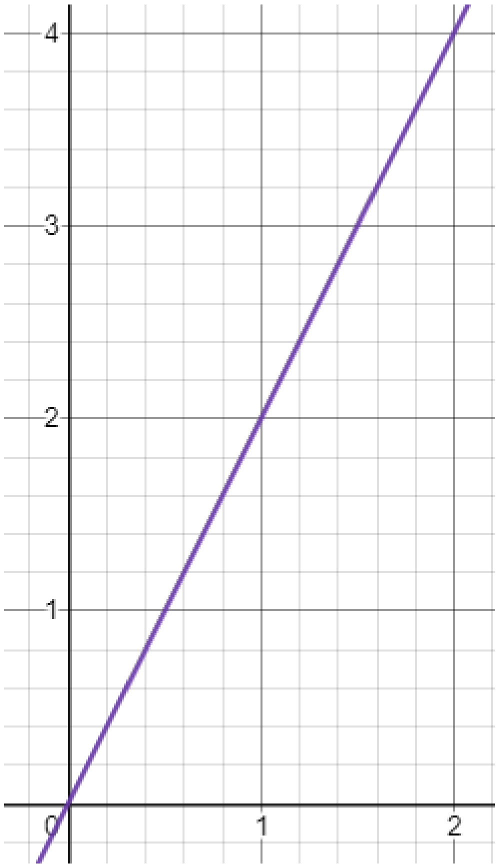
導関数は$f(x) = x^2$の傾き(微分係数)を求める関数なので、以下のようにxに値を入れれば、微分係数が求まる。

$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

微分係数を求める場合は、導関数を求めて、導関数を使うというアプローチの方が計算が多少楽になる。



ちなみにこれは導関数のグラフだが、$f(x) = x^2$の傾きの増え方を表している。

ポイント

微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分

導関数を求めること、以下のようにまたいろいろな表現があるがどれも同じ事を言っている。

- $f(x) = x^2$を微分せよ
- $f(x) = x^2$の導関数を求めよ
- $f(x) = x^2$とするとき、$f'(x)$を求めよ
- $(x^2)'$を求めよ

導関数を求める公式

いままで導関数を計算して求めていたが、導関数は簡単に求められる公式がある。

$$(c)' = 0 \quad \cdots (c\text{は定数})$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \cdots (n\text{は自然数})$$

定数の微分は0になる

$$(5)' = 0$$
$$(9)' = 0$$

x^nの微分

$$(x)' = 1 \cdot x^0 = 1$$
$$(x^2)' = 2 \cdot x^1 = 2x$$
$$(x^3)' = 3 \cdot x^2 = 3x^2$$

多項式の微分

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 5\text{を微分せよ}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 2x + 2 + 0 \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$